线性代数　中国科学技术大学 2023 春
线性映射

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

子空间的运算 *

如何从已有的子空间构造新的子空间?

定理 (子空间之交)

设 $W_i (i \in I)$ 为 V 的子空间, 则 $\cap_{i\in I} W_i$ 也为 V 的子空间. 特别地, 设 W_1, W_2 为 V 的子空间, 则 $W_1 \cap W_2$ 也为 V 的子空间.

定理 (子空间之和)

设 W_1, W_2 为 V 的子空间, 则 W_1 与 W_2 的和

$$W_1 + W_2 := \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$$

构成 V 的子空间, 并且是包含 $W_1 \cup W_2$ 的最小子空间.

维数公式

定理 (维数公式)

设 W_1, W_2 为 V 的子空间, 则

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

推论

设 W_1, W_2 为 V 的子空间. 则

1. $\dim(W_1 + W_2) \leq \dim(W_1) + \dim(W_2)$;
2. $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$;
3. $\dim(W_1 \cap W_2) \geq \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(V)$. 特别地, 若 $\dim(W_1) + \dim(W_2) > \dim(V)$, 则 $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

定义 (直和)

设 W_1, W_2 为 V 的子空间. 若任意 $\alpha \in W_1 + W_2$ 可唯一地写成

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (\alpha_1 \in W_1 \,\&\, \alpha_2 \in W_2),$$

则称 $W_1 + W_2$ 为直和, 记为 $W_1 \oplus W_2$. 若 $V = W_1 \oplus W_2$, 则称 W_1 为 W_2 的补空间.

注: 补空间不唯一 (例子). 如何构造补空间? 扩充基!

定理

设 W_1, W_2 为 V 的子空间. 则以下几条等价:

1. $W_1 + W_2$ 为直和;
2. $W_1 \cap W_2 = \{0\}$;
3. $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$;
4. 任取 W_1 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 和 W_2 的一组基 $\beta_1, \cdots, \beta_s$, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s$ 构成 $W_1 + W_2$ 的一组基.

给定一个数组向量空间之间的映射 $\mathscr{A}: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$.
若 $\mathscr{A}$ 满足

$$\begin{aligned} &\text{(保持加法)} \quad \mathscr{A}(\vec{a}+\vec{b}) = \mathscr{A}(\vec{a}) + \mathscr{A}(\vec{b}); \\ &\text{(保持数乘)} \quad \mathscr{A}(\lambda\vec{a}) = \lambda\mathscr{A}(\vec{a}) \end{aligned} \qquad (*)$$

则 $\mathscr{A}$ 称为从 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的一个线性映射.

我们有如下一一对应:

$$\boxed{\text{从 } \mathbb{F}^n \text{ 到 } \mathbb{F}^m \text{ 的全体线性映射} \quad \xleftrightarrow[\mathscr{A}(\vec{x})=A\vec{x}]{1:1} \quad \mathbb{F}^{m\times n}}$$

一般线性空间之间的线性变换

接下来将线性映射推广到一般的线性空间上.

定义 (线性映射, 线性变换和同构)

设 V 和 W 为两个 $\mathbb{F}$-线性空间.(注意: 这里 V 和 W 不再要求是数组向量空间, 而只是一般的线性空间.)

1. 若映射 $\mathscr{A}: V \to W$ 满足
   - $\mathscr{A}(P_1 + P_2) = \mathscr{A}(P_1) + \mathscr{A}(P_2)$;
   - $\mathscr{A}(\lambda P_1) = \lambda \mathscr{A}(P_1)$.

   则称 $\mathscr{A}$ 为从 V 到 W 的线性映射.
2. 若 $V = W$, 则称线性映射 $\mathscr{A}$ 为 V 上的一个线性变换.
3. 若线性映射 $\mathscr{A}$ 为双射, 则称 $\mathscr{A}$ 为线性空间 V 到 W 的一个同构映射. 若两个线性空间之间存在同构映射, 则称它们互相同构.

性质 (同构基本性质)

- 同构映射的逆映射也是同构映射.
- 同构为等价关系.
- (同一域上的) 有限维线性空间同构当且仅当它们维数相同.

例

1. 单位变换 (恒等变换): $\varepsilon\colon V \to V, x \mapsto x$;
2. 零映射: $\varepsilon\colon V \to W, x \mapsto 0$;
3. 微分变换:
$$\mathscr{A}: \mathbb{F}_n[x] \to \mathbb{F}_n[x], \quad p(x) \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x).$$
4. 积分变换:
$$\mathscr{A}: C[a,b] \to C[a,b], \quad f \mapsto \int_a^b K(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$
其中 $K(x,t)$ 为 $[a,b] \times [a,b]$ 上的实值连续函数.
5. 线性化变换: 记 V 为 $[a,b]$ 上的函数集合.
$$\mathscr{A}: V \to V, \quad f \mapsto (1-x)f(a) + xf(b).$$
6. 矩阵对应的线性映射: $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$.
$$\mathscr{A}: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m, \quad x \mapsto Ax(\text{列向量}).$$

例

7. 投影映射: $\mathscr{A}: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^r, (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x_1, \cdots, x_r)$;
8. 嵌入映射: $\mathscr{A}: \mathbb{F}^r \to \mathbb{F}^n, (x_1, \cdots, x_r) \mapsto (x_1, \cdots, x_r, 0, \cdots, 0)$;
9. $\mathscr{A}: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n, (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1)$;
10. 设 $A \in \mathbb{F}^{p\times m}$ 以及 $B \in \mathbb{F}^{n\times q}$ 为固定矩阵,
$$\mathscr{A}: \mathbb{F}^{m\times n} \to \mathbb{F}^{p\times q}, \quad X \mapsto AXB.$$
11. 设 V 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 V 中的任意 n 个向量.
$$\mathscr{A}: \mathbb{F}^n \to V, \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

例 (反例)

1. $\mathscr{A}: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, (x, y, z) \mapsto (x^2, xy, z^2)$ 不是 $\mathbb{C}$-线性的.
2. $\mathscr{A}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$ 是 $\mathbb{R}$-线性的但不是 $\mathbb{C}$-线性的.

性质 (线性映射的基本性质)

设 $\mathscr{A}$ 为从 $\mathbb{F}$-线性空间 V 到 $\mathbb{F}$-线性空间 W 的线性映射. 则

1. $\mathscr{A}(0) = 0$;
2. $\mathscr{A}(-\alpha) = -\mathscr{A}(\alpha)$, $(\forall \alpha \in V)$;
3. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的一组基. 若 $\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n$, 则
$$\mathscr{A}(\alpha) = \lambda_1\mathscr{A}(\alpha_1) + \cdots + \lambda_n\mathscr{A}(\alpha_n).$$
即, 线性映射 $\mathscr{A}$ 由 $\mathscr{A}(\alpha_1), \cdots, \mathscr{A}(\alpha_n)$ 这 n 个向量唯一确定.
4. 若 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性相关, 则 $\mathscr{A}\beta_1, \cdots, \mathscr{A}\beta_m$ 也线性相关.
5. 若 $\mathscr{A}\beta_1, \cdots, \mathscr{A}\beta_m$ 线性无关, 则 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 也线性无关.

线性映射的矩阵 *

设 $\mathscr{A}$ 为从 n 维 $\mathbb{F}$-向量空间 V 到 m 维 $\mathbb{F}$-向量空间的一个线性变换. 分别取定 V 和 W 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$. 对任意 $j=1,2,\cdots,n$, 设 $\mathscr{A}(\alpha_j)\in W$ 在基 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 下的坐标为 $(a_{1j},\cdots,a_{mj})^T$, 即

$$\mathscr{A}(\alpha_j)=a_{1j}\beta_1+\cdots+a_{mj}\beta_m.$$

则这一式子可改写为

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n):=\Big(\mathscr{A}(\alpha_1),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_n)\Big)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)A,$$

其中 $A:=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$. 称 A 为线性映射 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 下的矩阵.

例

设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$. 定义从 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的线性变换

$$\mathscr{A}(X)=AX.$$

则 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵为 A.

证: 记 $e_1,\cdots,e_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的自然基, $e_1',\cdots,e_m'$ 为 $\mathbb{F}^m$ 的自然基. 则 $\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n):=(\mathscr{A}e_1,\cdots,\mathscr{A}e_n)=(Ae_1,\cdots,Ae_n)=A(e_1,\cdots,e_n)=AI_n=A=I_mA=(e_1',\cdots,e_m')A.$

线性映射的矩阵 *

例 (从矩阵出发构造线性映射)

分别取定 $\mathbb{F}$-线性空间 V 和 W 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_m$. 对于给定矩阵 $B = (b_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 如下给出一个从 V 到 W 的映射 $\mathscr{B}$. 对任意的 $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n \in V$, 定义[a]

$$\mathscr{B}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\alpha_j\right) := \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\lambda_j\right)\beta_i.$$

则 $\mathscr{B}$ 为从 V 到 W 的一个线性映射, 且其在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 下的矩阵正好为 B.

---

[a] 这一定义也可改写为 $\mathscr{B}\left((\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\right) = (\beta_1, \cdots, \beta_n)B\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$.

从而, 我们得到如下一一对应:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{从 } V \text{ 到 } W \text{ 的}\\ \text{全体线性映射}\end{array}\right\} \xleftrightarrow[\substack{1:1\\ \mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)A}]{\substack{\text{基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n\\ \text{基}\beta_1,\cdots,\beta_m}} \mathbb{F}^{m\times n}$$

线性映射的坐标表示 *

定理

设 A 为线性映射 $\mathscr{A}: V \to W$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 下的矩阵. 若 X 为向量 $v \in V$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标, 以及 Y 为 $\mathscr{A}(v)$ 在基 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 下的坐标, 则

$$Y = AX.$$

换言之, 线性映射的作用可以通过对坐标左乘矩阵 A 实现. 即, 下图交换

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\text{基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n", "1:1"'] \arrow[d, "v\mapsto\mathscr{A}(v)"', "\mathscr{A}"] \arrow[drr, phantom, "\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)A"] & & \mathbb{F}^n \arrow[d, "A"', "X\mapsto AX"] \\
W \arrow[rr, "\text{基}\beta_1,\cdots,\beta_n", "1:1"'] & & \mathbb{F}^m
\end{tikzcd}$$

证明思路: $\mathscr{A}(v) = \mathscr{A}((\alpha_1, \cdots, \alpha_n)X) = \mathscr{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \cdot X = (\beta_1, \cdots, \beta_m)A \cdot X = (\beta_1, \cdots, \beta_m) \cdot AX.$

线性代数的核心 *

几何 $\underset{\text{基}}{\overset{\text{坐标系}}{\longleftrightarrow}}$ 代数	
线性空间	数组空间
向量	坐标
线性映射	基下矩阵
内积	矩阵
二次型	矩阵
张量	由数组成的高维阵列
$\cdots$	$\cdots$

现在, 我们考虑 W 等于 V 的情形.

设 $\mathscr{A}$ 为 V 上的线性变换. 固定 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. 则存在矩阵 $A := (a_{ij})_{n\times n}$ 使得

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)A.$$

称矩阵 A 为线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 下的矩阵.

例

设 $V = \mathbb{F}^{2\times 2}$. 记 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in V$. 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$

$$\mathscr{A}(M) := AM.$$

求 $\mathscr{A}$ 在 $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$ 下的矩阵.

$$\left\{ \begin{matrix} \text{从 } V \text{ 到 } V \text{ 的} \\ \text{全体线性变换} \end{matrix} \right\} \xleftrightarrow[\substack{1:1 \\ \mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A}]{\text{基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n} \mathbb{F}^{n\times n}$$

线性变换的坐标表示

向量 x 和 $\mathscr{A}x$ 在同一组基下坐标之间的关系.

定理

设 $\mathscr{A}: V \to V$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A. 若向量 $x \in V$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标 $X \in \mathbb{F}^n$, 向量 $\mathscr{A}x$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标为 $Y \in \mathbb{F}^n$, 则

$$Y = AX.$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\text{基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n", "1:1"'] \arrow[d, "\mathscr{A}"'] \arrow[dr, phantom, "\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A"] & \mathbb{F}^n \arrow[d, "A"] \\
V \arrow[r, "\text{基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n", "1:1"'] & \mathbb{F}^n
\end{tikzcd}$$

例

记 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$

$\beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. 设 $\mathscr{A}$ 为 $\mathbb{F}^3$ 上线性变换满足 $\mathscr{A}(\alpha_i) = \beta_i \ (i = 1, 2, 3)$. 求

1. $\mathscr{A}$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵;
2. $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵.

解答:

1. $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -5 \\ -10 & -23 & 15 \\ -7 & -16 & 13 \end{pmatrix}$;
2. $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -20 & 11 \\ 0 & -16 & 10 \\ 5 & -15 & 7 \end{pmatrix}$.